

# Mathematik im Alltag

Statistische Tests

# Panini Bilder

- 682 verschiedene Bilder
- Man kann kaufen:
  - Einzelpäckchen mit 5 Karten
  - Box mit 100 Päckchen (also 500 Karten)
- Der Freund meiner Kinder:  
“Ich kaufe eine Box, um viele verschiedene Karten zu haben und dann kaufe ich Einzelpäckchen zum Tauschen.”
- Gibt es tatsächlich wenige Doppelte in einer Box?



# Experiment

- Wir haben eine Box gekauft
- Mein Sohn hat 50 Päckchen aufgemacht (250 Karten)
- Er hatte 244 verschiedene und 6 doppelte Karten
- Was können wir daraus schliessen?

# Wir wissen nur wenig...

- Es gibt Millionen von Panini Päckchen; mit den 50 Päckchen sehen wir nur einen sehr kleinen Teil
- Das Ergebnis ist zufällig: wenn wir nochmals 50 Päckchen aufmachen würden, würden wir eine (leicht) andere Anzahl verschiedener und doppelter Karten bekommen
- Können wir trotzdem etwas Sinnvolles tun?

# Gedanken-Experiment

- Stellen wir uns vor: wir haben eine Panini Fabrik, die die Karten rein zufällig einpackt
  - Es gibt 682 Behälter mit den verschiedenen Karten
  - Die Maschine wählt jeweils zufällig einen Behälter und nimmt die entsprechende Karte heraus
  - 5 Karten -> 1 Päckchen
  - 100 Päckchen -> 1 Box



# Gedanken-Experiment

- Wir könnten dann beliebig viele Päckchen und Boxen füllen
- Wir könnten beliebig oft 50 Päckchen aufmachen
- Wir würden jedes Mal die Anzahl verschiedener Karten bestimmen
  
- Wie viele verschiedene Karten erwarten wir im Schnitt?
- Wie viel Streuung gibt es?
- Wie passt unser Wert von 244 dazu?

# Wir haben aber so eine Maschine...

- Nämlich ein Laptop!
- Die Karten repräsentieren wir durch die Zahlen 1 bis 682
- Wir benutzen die statistische Software R

## R code

```
nr.simul <- 1000000
resultate <- rep(0, nr.simul)

for (i in 1:nr.simul){
  x <- sample( c(1:682), 250, replace=T )
  resultate[i] <- length( unique(x) )
}
```

# Resultate

```
> resultate[1:10]
```

```
[1] 214 207 210 218 208 207 207 211 209 217
```

```
> mean(resultate)
```

```
[1] 209.4275
```

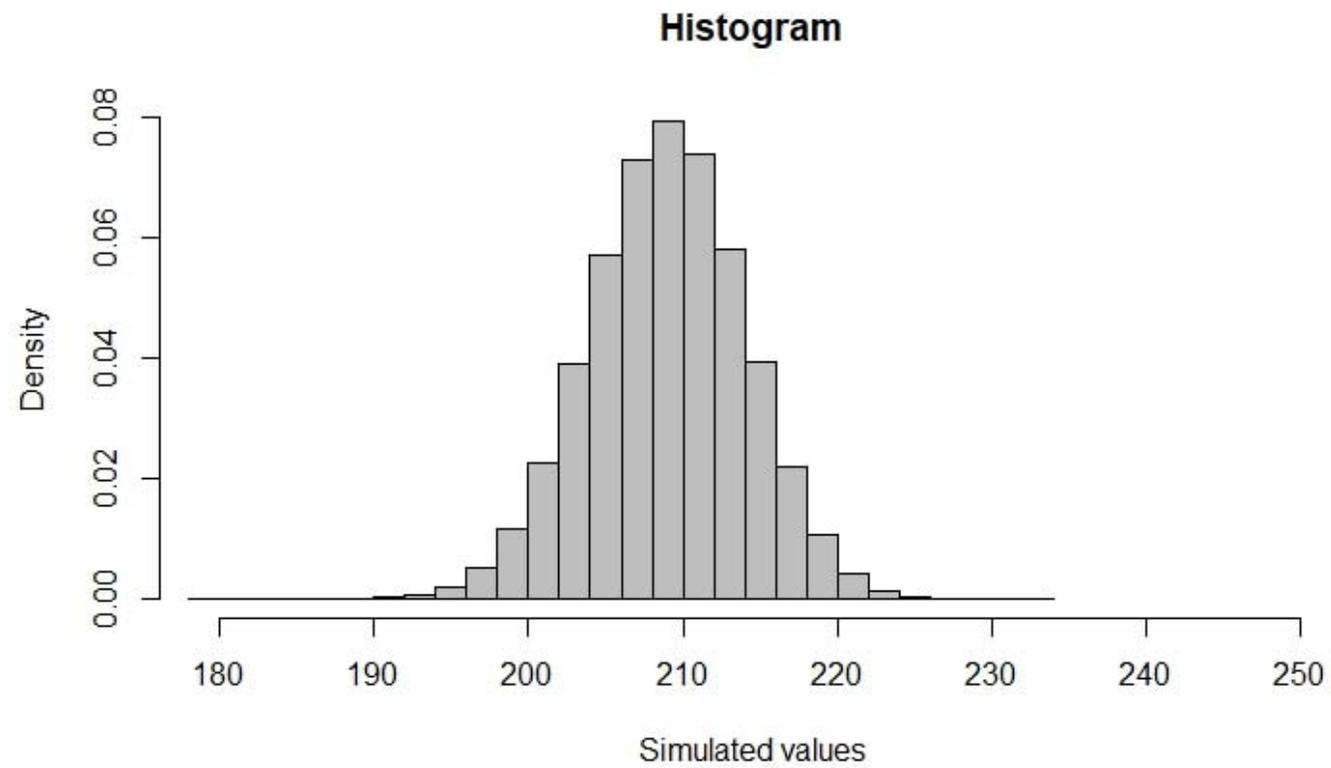
```
> min(resultate)
```

```
[1] 179
```

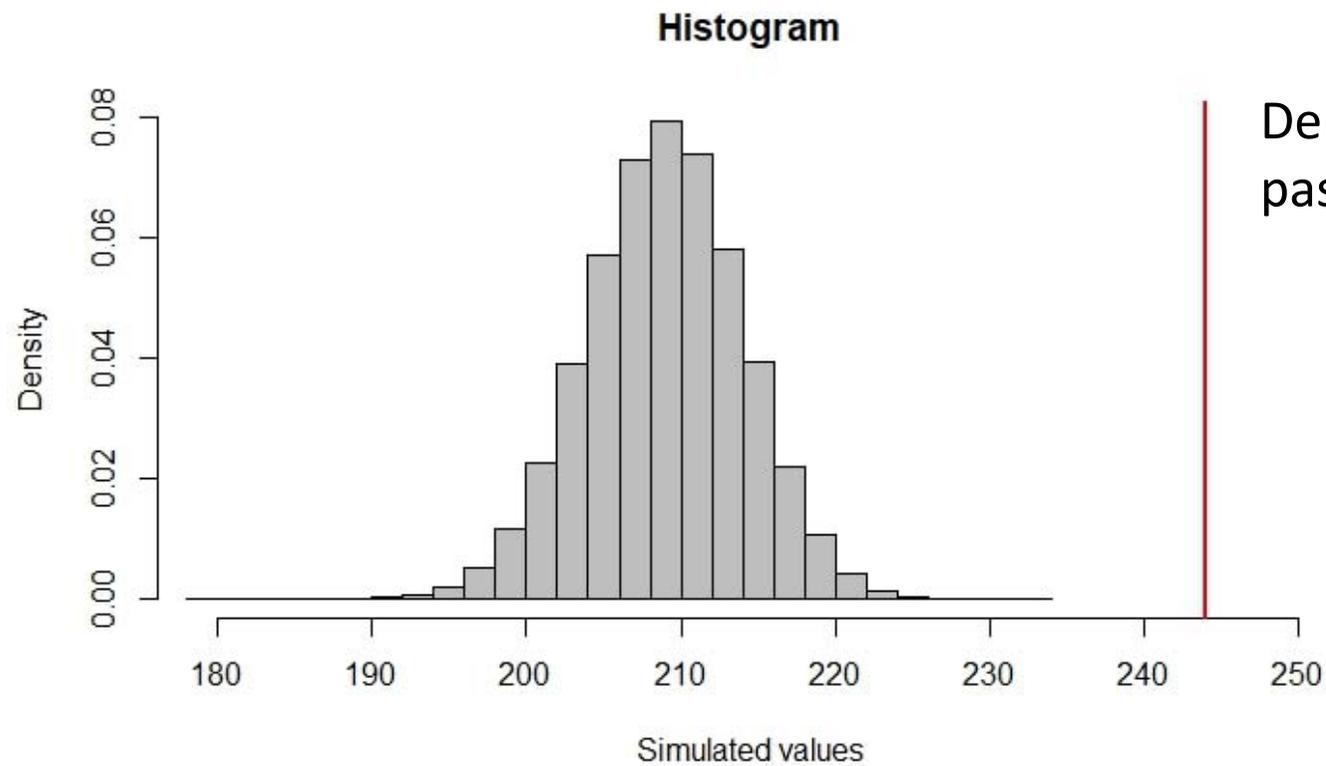
```
> max(resultate)
```

```
[1] 234
```

# Resultate



# Resultate



Der Wert von 244  
passt gar nicht dazu!

# Fazit

- Falls die Karten zufällig eingepackt werden, gibt es in 50 Päckchen (250 Karten) etwa  $210 \pm 10$  verschiedene Karten (Simulation)
- Bei uns gab es aber 244 verschiedene Karten
- Dieser Wert ist sehr extrem bezüglich der simulierten Verteilung
- Entweder hatten wir *gaaaaaaaanz* viel Glück (Chance  $< 1/\text{Mio.}$ ) oder unser Gedanken-Experiment entspricht nicht, was Panini macht
- Wir glauben eher das Letztere:  
Panini packt die Karten nicht rein zufällig ein  
(signifikanter Befund)

# Medizinisches Beispiel

- Die Heilungschance einer Krankheit ist 20%
- Es gibt ein neues Medikament, von dem man vermutet, dass es die Heilungschance erhöht
- Es gibt eine Stichprobe von 100 Patienten, die alle das neue Medikament bekommen
- 25 Patienten werden geheilt
- Erhöht das Medikament die Heilungschance?



# Wir wissen nur wenig...

- Es gibt Milliarden von Menschen; mit den 100 Patienten sehen wir nur einen sehr kleinen Teil
- Das Ergebnis ist zufällig: wenn wir nochmals 100 Patienten behandeln würden, würde die Anzahl der Geheilten wahrscheinlich anders sein
- Können wir trotzdem etwas Sinnvolles tun?

# Gedanken-Experiment

- Wir stellen uns das Folgende vor:
  - die Heilungschance bleibt mit dem neuen Medikament gleich
  - wir können beliebig oft eine Stichprobe von 100 Patienten nehmen und das Medikament testen
  - wir bestimmen für jede Stichprobe die Anzahl der Geheilten
- Wie viele Geheilte erwarten wir im Schnitt?
- Wie viel Streuung gibt es?
- Wie passt unser Wert von 25 dazu?

## R-code

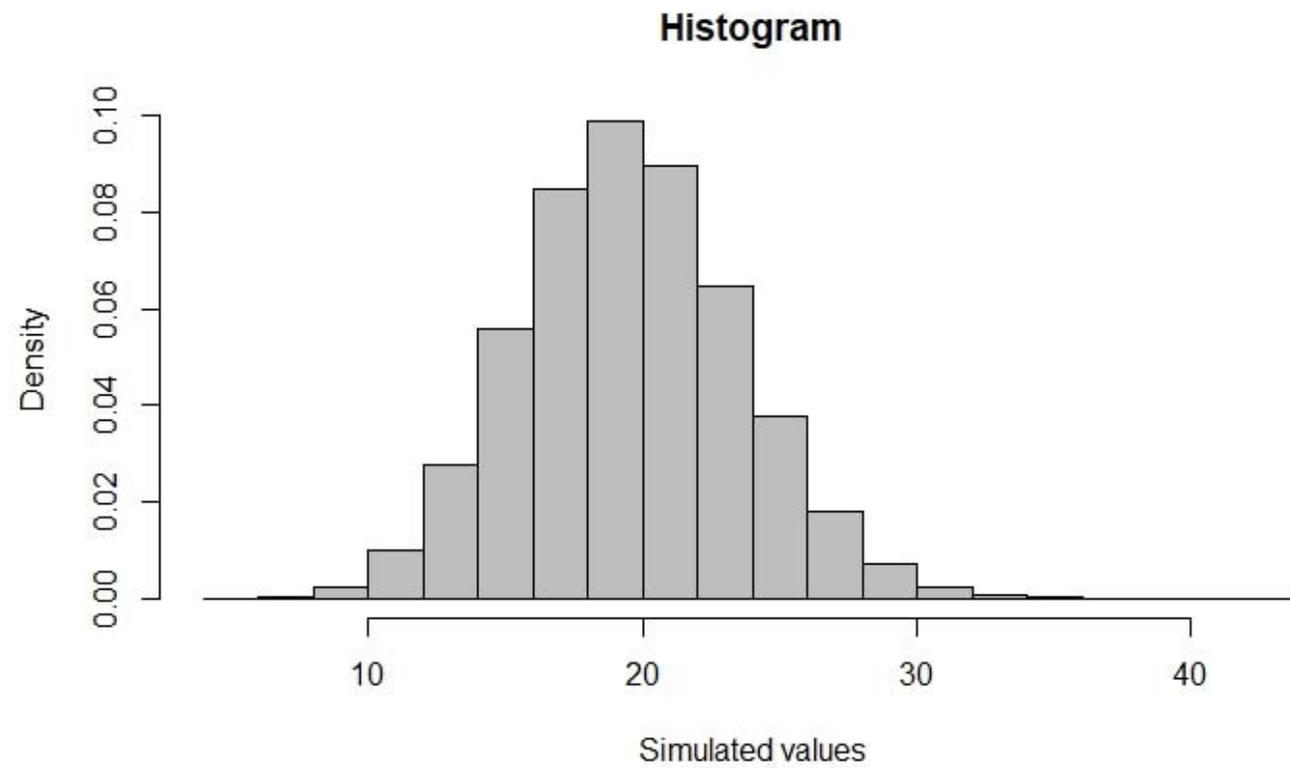
```
nr.simul <- 1000000
resultate <- rep(0, nr.simul)

for (i in 1:nr.simul){
  x <- sample( c(1,0,0,0,0), 100, replace=T )
  resultate[i] <- sum(x)
}
```

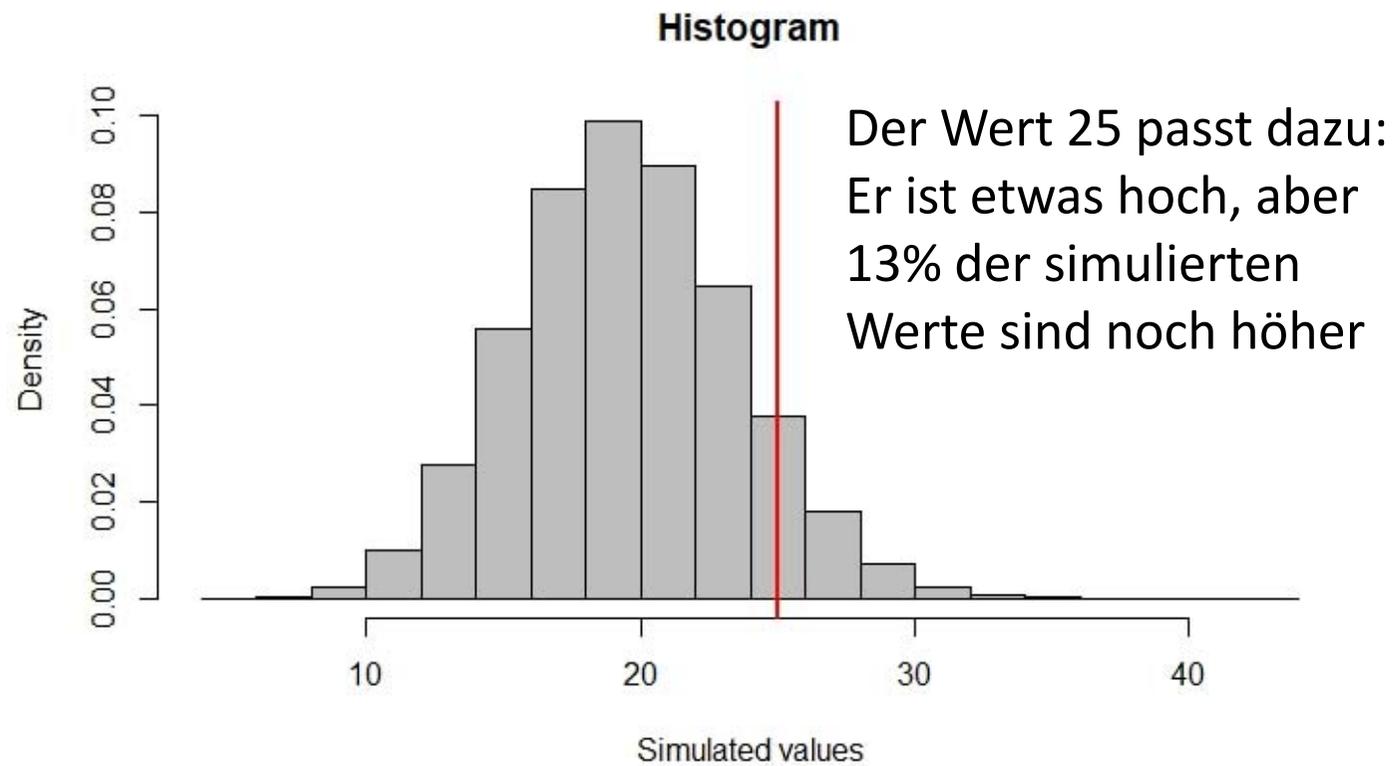
# Resultate

```
> resultate[1:10]
[1] 14 21 21 24 23 20 22 24 16 18
> mean(resultate)
[1] 19.9976
> min(resultate)
[1] 4
> max(resultate)
[1] 43
```

# Resultate



# Resultate



# Fazit

- Falls die Heilungschance mit dem neuen Medikament gleich bleibt, dann gibt es etwa  $20 \pm 8$  Geheilte pro Stichprobe (Simulation)
- In unserer Stichprobe wurden 25 Patienten geheilt
- Dieser Wert ist nicht extrem bezüglich der simulierten Verteilung
- Wir sind nicht überzeugt, dass das neue Medikament besser ist (nicht signifikanter Befund)

# Zusammenfassung

- Wir haben zwei Beispiele von statischen Tests gesehen, welche wir mittels Simulationen durchgeführt haben
- Im ersten Fall war die Simulation “notwendig”, im zweiten Fall könnten wir die Verteilung auch einfach theoretisch herleiten
- Ein statistischer Test beruht immer auf einem Gedanken-Experiment:
  - Wir nehmen mal ein Szenario an
  - Was für Werte erwartet man dann im Schnitt?
  - Wie viel Streuung gibt es?
  - Wie passt der beobachtete Wert dazu?
  - Je schlechter der Wert dazu passt, desto weniger glauben wir an das Szenario



Fragen?